

Krisen von chaotischen Attraktoren

1. Grundlagen

Definition:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, \mathbb{T} eine Zeitmenge, $\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ ein Fluss.

- Eine kompakte, invariante Menge $K \subset X$ heißt *attraktiv*, falls es eine offene Menge $U \subset X$ gibt, sodass für alle $x \in U$ gilt $\omega(x) \subset K$.
- $K \subset X$ heißt *stabil*, falls es zu jeder Umgebung $V \supset K$ eine Umgebung $U \supset K$ gibt, sodass $\forall x \in U : O^t(x) \subset V$.
- Eine kompakte, invariante Menge heißt *Attraktor*, wenn sie attraktiv und stabil ist.

Definition:

Sei $x_0 \in X$ ein kritischer Punkt eines dynamischen Systems mit Fluss ϕ . Dann nennen wir

$$\begin{aligned} W_s(x_0) &:= \{x \in X \mid \phi(t, x) \rightarrow x_0 \text{ für } t \rightarrow \infty\} \\ W_u(x_0) &:= \{x \in X \mid \phi(t, x) \rightarrow x_0 \text{ für } t \rightarrow -\infty\} \end{aligned}$$

die *stabile* und die *instabile* Mannigfaltigkeit von x_0 .

Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen:

- Betrachte zwei fast identische Anfangsbedingungen für ein kontinuierliches, dynamisches System: $x_1(0)$ und $x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$
- Das System *hängt exponentiell sensitiv von den Anfangsbedingungen ab*, falls die Orbits für $t \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben und ein $h > 0$ existiert, sodass für große t

$$\frac{|\Delta(t)|}{|\Delta(0)|} \sim \exp(ht)$$

Das Beschattungslemma:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein z_0 nahe bei x_0 , sodass die wahre Bahn von z_0 nie weiter als ε von der fehlerhaft berechneten Bahn von x_0 abweicht.

Fraktale Dimension:

Überdecke den \mathbb{R}^n mit Würfeln der Kantenlänge ε und definiere für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ihre *Boxdimension* durch

$$D_0(M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}$$

wobei $N(\varepsilon)$ die Anzahl der Würfel ist, die Punkte aus M enthalten.

Definition:

- Ein Attraktor heißt *chaotisch*, wenn er exponentielle Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen aufweist.

- Ein Attraktor heißt *merkwürdig* oder *seltsam*, wenn seine Dimension keine ganze Zahl ist.

Krisen von Attraktoren:

- Plötzliches Verschwinden oder Auftauchen eines Attraktors (Randkrise)
- Plötzliche Größenänderung eines Attraktors (innere Krise)
- Mehrere Attraktoren verschmelzen miteinander oder ein Attraktor teilt sich in mehrere (Mischungskrise)

2. Das Lorenz-System

Die Lorenz-Gleichungen:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \tag{1}$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \tag{2}$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \tag{3}$$

Dabei sind $\sigma, r, b \in \mathbb{R}_{>0}$, üblicherweise werden die Parameter $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ festgelegt, r wird variiert.

Definition:

Ein System heißt *dissipativ*, falls eine beschränkte Teilmenge $B \subset X$, existiert, sodass

$$\forall x_0 \in X \exists t_0 : \phi(t, x) \in B \quad \forall t > t_0$$

Das Lorenz-System ist dissipativ.

Das Lorenzsystem besitzt drei Ruhelagen:

$$\begin{aligned} O &:= (0, 0, 0) \\ C_1 &:= (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ C_2 &:= (-\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \end{aligned}$$

Bei $r = \frac{470}{19} \approx 24,74$ verlieren C_1 und C_2 ihre Stabilität, es findet eine subkritische Hopf-Bifurkation statt.

Existenz eines homoklinen Orbits:

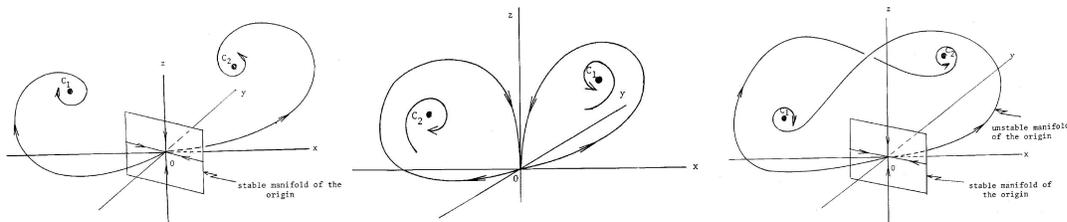


Abbildung 1: Für einen Parameterwert $r' \approx 13,926$ gibt es einen homoklinen Orbit.

Für $r > r'$ existiert eine seltsame, invariante Menge. Sie besteht aus abzählbar vielen periodischen, überabzählbar vielen aperiodischen und ebenfalls überabzählbar vielen Trajektorien, die im Ursprung enden. Ab $r > r^* = 24,06$ wird diese Menge attraktiv.

3. Spannungseinbruch im Stromnetz

Stromversorgungsnetze können durch Differentialgleichungssysteme modelliert werden.

- Bifurkationen, die in solchen Modellen auftreten, werden mit plötzlichen Spannungseinbrüchen bei Überschreiten einer kritischen Ladung in Zusammenhang gebracht.
- Behauptung:
In bestimmten Modellen, die einen Spannungseinbruch simulieren, liegt diesem eine Randkrise eines chaotischen Attraktors zugrunde.

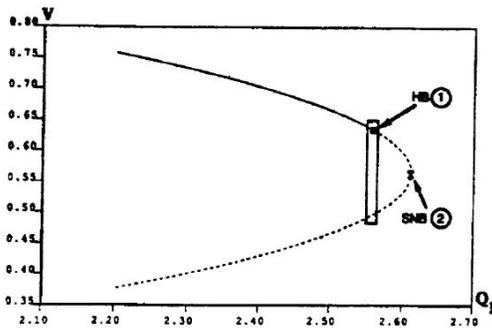


Fig. 1. V vs. Q_1 at system equilibria

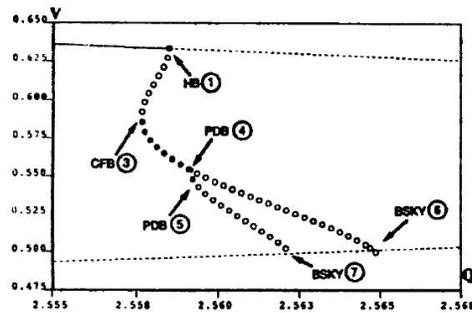


Fig. 2. Magnified bifurcation diagram for boxed region in Fig. 1

Abbildung 2: Verzweigungsdiagramm eines 4-dim. Differentialgleichungssystems zur Modellierung eines Spannungseinbruchs [Wang, Abed, Hamdan]